

PRODUKT (ILOCZYN) KARTEZJAŃSKI ZBIORÓW

Nazwa **iloczyn kartezjański** pochodzi od nazwiska wybitnego francuskiego filozofa i matematyka Kartezjusza (właściwe nazwisko Rene' Decartes), który wprowadził to pojęcie w kontekście geometrii analitycznej.

Produkt kartezjański zbiorów X i Y oznaczamy przez $X \times Y$ i definiujemy jako zbiór wszystkich par uporządkowanych $\langle x, y \rangle$ takich, że $x \in X$ i $y \in Y$.

Formalnie: $X \times Y = \{ \langle x, y \rangle : x \in X \wedge y \in Y \}$.

Co to znaczy, że jest to zbiór par uporządkowanych?

Para uporządkowana $\langle x, y \rangle$ elementów jakiegoś zbioru to takie dwa elementy tego zbioru, spośród których wyróżniony jest pierwszy zwany poprzednikiem i drugi zwany następnikiem. Innymi słowy kolejność tych elementów w parze jest istotna i ustalona.

Formalnie parę uporządkowaną zdefiniował wybitny polski matematyk Kazimierz Kuratowski jako zbiór postaci: $\langle a, b \rangle = \{ \{a\}, \{a, b\} \}$

Zatem zbiór, który powstaje w wyniku wykonania działania $\times$ nie jest zwykłym zbiorem elementów, ale zbiorem, którego elementy stanowią pary.

Każdy podzbiór iloczynu kartezjańskiego można utożsamiać z pewną relacją binarną (dwuargumentową), bowiem jeśli dane są pewne zbiory X i Y , to relacją między elementami zbiorów X i Y nazywamy dowolny zbiór par uporządkowanych $\langle x, y \rangle$, z których x jest elementem zbioru X a y jest elementem zbioru Y .

Bezpośrednio z definicji wynikają następujące związki dla dowolnych zbiorów A, B, X i Y :

$$(1) (A \times B = \emptyset) \Leftrightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset)$$

$$(2) (A \times B = B \times A) \Leftrightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset \vee A = B)$$

$$(3) (X \neq \emptyset) \Rightarrow [(A \subset B) \Leftrightarrow (A \times X \subset B \times X) \Leftrightarrow (X \times A \subset X \times B)]$$

$$(4) (X \times Y \neq \emptyset) \Rightarrow [(X \times Y \subset A \times B) \Leftrightarrow (X \subset A \wedge Y \subset B)]$$

Przykłady produktu kartezjańskiego:

- 1) Płaszczyzna Euklidesowa – jako zbiór wszystkich punktów postaci $\langle x, y \rangle$, gdzie x jest odciętą punktu, a y rzędną punktu oraz $x, y \in R$; zatem płaszczyzna rzeczywista to po prostu produkt kartezjański $R \times R$.
- 2) Podobnie zbiór liczb zespolonych jest produktem $R \times R$. Dowolna liczba zespolona $z = x + iy$ o części rzeczywistej x i urojonej y , to nic innego jak para uporządkowana o poprzedniku x i następniku y .
- 3) Jeśli $X = \{1, 2\}$, a $Y = \{a, b, c\}$, to
 $X \times Y = \{ \langle 1, a \rangle, \langle 1, b \rangle, \langle 1, c \rangle, \langle 2, a \rangle, \langle 2, b \rangle, \langle 2, c \rangle \}$,
a $Y \times X = \{ \langle a, 1 \rangle, \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle b, 2 \rangle, \langle c, 1 \rangle, \langle c, 2 \rangle \}$.

Widzimy więc, że $X \times Y \neq Y \times X$, tym samym pokazaliśmy, że produkt kartezjański nie jest przemienny. Jest to jedna z podstawowych własności iloczynu kartezjańskiego, podobnie jak ta, że produkt ten nie jest łączny, ale za to ustępuje pierwszeństwa działaniom mnogościowym.

Więcej...

1. Malec M., Elementarny wstęp do teorii relacji., Wydawnictwo AGH., Kraków 1998., cz.I.
2. Rasiowa H., Wstęp do matematyki współczesnej., PWN., Warszawa 1968.
3. Matematyczny serwis internetowy., Matematyka Dyskretna., <http://matematyka.w.interia.pl/relacje/index.html>
4. Internetowy serwis edukacyjny <http://www.int.pjwstk.edu.pl./mad/index14.html>