

TEORIA MNOGOŚCI

*Przedmiotem badań teorii mnogości są zbiory nieskończone.*¹

W. Sierpiński

Teoria mnogości, to dział matematyki zajmujący się badaniem własności zbiorów, stąd też nazywana jest ona często teorią zbiorów. Twierdzenia teorii mnogości dotyczą dowolnych zbiorów niezależnie od tego, jakie są elementy tych zbiorów. Twórcą teorii mnogości był matematyk niemiecki G. Cantor.

Pierwszą ważniejszą pracą z teorii mnogości był dowód G. Cantora z 1873 r, w którym wykazał, że zbiór wszystkich liczb algebraicznych jest przeliczalny, a jednocześnie zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nie jest przeliczalny. Cantor rozwijał teorię mnogości nie precyzując pojęcia „zbiór”. Ten poziom ścisłości wystarczał do uzyskania większości najważniejszych wyników, podobnie problem continuum - jeden z najważniejszych problemów teorii mnogości, nie budził wtedy wątpliwości. Dopiero na początku wieku XX kontrowersja wokół zasady wyboru odsłoniła poważne różnice w rozumieniu pojęcia „zbiór”. Sprzeczność intuicyjnej teorii mnogości wykazał B. Russell konstruując następującą antynomię:

*Niech Z będzie zbiorem złożonym ze wszystkich tych zbiorów, które nie są swymi elementami. Łatwo zauważyć, że zarówno założenie $Z \in Z$, jak też założenie $Z \notin Z$ prowadzi do sprzeczności.*²

Początkowo teoria mnogości posługiwała się intuicyjnie rozumianym pojęciem zbioru, rozwijając się jako tzw. „naiwna” teoria mnogości. W zakresie tej teorii można było prowadzić poprawne i ścisłe rozumowania, dotyczące wielu zagadnień matematyki. Okazały się one jednak zawodne przy rozwiązywaniu problemów związanych z istotą pojęcia zbioru. Na gruncie „naiwnej” teorii mnogości pojawiły się trudności natury logicznej, tzw. antynomie (sprzeczności). Próby przewyciężania tych trudności zapoczątkowały proces formalizacji teorii mnogości i powstanie aksjomatycznej teorii mnogości.

I tak: Zermelo ok. 1910 r. zaksjomatyzował teorię mnogości i usunął antynomię Russella nakładając na konstrukcję zbiorów szereg ograniczeń.

Własny system rozumienia pojęcia „zbiór” stworzył St. Leśniewski. System ten uznawany jest do dziś za wyjątkowo oryginalną i konsekwentną próbę budowania podstaw matematyki. Nad tym systemem pracowało wielu polskich logików, w tym A. Tarski i A. Lindenbaum.

W okresie międzywojennym stopniowo kształtowało się przeświadczenie, że właściwym fundamentem teorii mnogości jest system Zermeli-Fraenkla. Wtedy też najważniejszymi problemami podstaw teorii mnogości stały się kwestie niesprzeczności i niezależności aksjomatu wyboru.

W nawiązaniu do w/w problemów teorii mnogości nie można pominąć faktu, że do najważniejszych problemów teorii mnogości już od XVII w. należała hipoteza continuum, jako mocy zbioru wszystkich liczb rzeczywistych. Dopiero w 1963 roku P.J.Cohen wykazał, że na gruncie ogólnie przyjętego układu aksjomatów hipotezy continuum nie da się udowodnić.

Inny problem teorii mnogości, na który uwagę zwrócił Hilbert dotyczył uporządkowania zbioru liczb rzeczywistych. E. Zermelo w 1908 r. próbował zaksjomatyzować teorię mnogości, aby swój dowód twierdzenia o dobrym porządku umieścić w ścisłych ramach formalnej teorii. Aksjomatyzacja teorii mnogości jest jednym z

¹ Skurzyński K., Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura., Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego., Szczecin 1992., s.44.

² Zakrzewski M., Teoria mnogości., Historia nauki polskiej wiek XX., Wydawnictwo IHN PAN., Warszawa 1994., s.95.

najważniejszych wydarzeń w dziejach tej dyscypliny, w którym matematycy polscy nie odegrali niestety żadnej znaczącej roli. Ich udział, a konkretnie udział

A. Mostowskiego i A. Lindenbauma zapisany został przy dowodzie niezależności aksjomatu wyboru od pozostałych aksjomatów teorii mnogości. Szczytowe osiągnięcia teorii mnogości w okresie międzywojennym wiążą się z nazwiskiem Godla, który zdefiniował tzw. zbiory konstruowalne. Dzięki tej definicji udało się wykazać niesprzeczność aksjomatu wyboru i hipotezy continuum. Dla współczesnej praktyki matematycznej najważniejszym odkryciem międzywojennej teorii mnogości, trwającym ponad 30 lat, jest zasada maksimum. Wśród najwybitniejszych matematyków zajmujących się tą tematyką wymienić należy m.in.:

K. Kuratowskiego i M. Zorna.

W drugiej połowie XIX w. powstała w Niemczech nowa dziedzina matematyki, tzw. teoria mnogości, a już w 1909 r. ówczesny docent Uniwersytetu Jana Kazimierza we Lwowie, Wacław Sierpiński wygłosił pierwszy na świecie wykład z tej nowej gałęzi wiedzy matematycznej, zaś w 1912 r. opublikował pierwszy podręcznik *Zarys teorii mnogości*. W ten sposób we Lwowie powstał ośrodek badań metodycznych nad teorią mnogości złożony z uczonych polskich.

Ogólnie można powiedzieć, że na teorię mnogości w Polsce międzywojennej składają się trzy tradycje: tradycja Sierpińskiego, tradycja lwowsko-warszawskiej szkoły filozoficznej oraz tradycja związana z Banachem z lwowskiej szkoły matematycznej.

Głównymi motywami badań Sierpińskiego były: teoria zbiorów nieskończonych oraz paradoksy nieskończoności. O szkole Sierpińskiego mówi się w odniesieniu do opisowej teorii mnogości. Znaczący wkład mają tu tacy logicy jak: Kuratowski, Mazurkiewicz, Marczewski, Nikodem, Braum.

Logicy tradycji lwowsko-warszawskiej szkoły filozoficznej zajmowali się szeroko rozumianymi podstawami matematyki. Wymienić tu należy prace nad aksjomatem wyboru w arytmetyce liczb kardynalnych. Wśród przedstawicieli tej szkoły można wymienić: Łukasiewicza, Leśniewskiego, Tarskiego, Mostowskiego, Kotarbińskiego.

Zainteresowania logików szkoły lwowskiej skupiały się głównie na teorii miary, co przyczyniło się w dalszych pracach do powstania kombinatoryki nieskończonej, teorii gier oraz odkrycia aksjomatu determinacji. Tu największe zasługi przypisuje się: Banachowi, Ulamowi i Tarskiemu.

Należy też podkreślić, że polska teoria mnogości nigdy już nie odzyskała takiej świetności, jaka była jej udziałem w okresie międzywojennym.

Jeśli chodzi o literaturę w zakresie teorii mnogości, to do roku 1995 ukazało się około 10.000 prac jej poświęconych, z czego na okres 1918 – 1951 przypada około 1.500 – 2.000 pozycji. Pierwsze na świecie pismo poświęcone w całości teorii mnogości i dyscyplinom pokrewnym to *Fundamenta Mathematicae*, którego I tom ukazał się w Warszawie w 1920 r. Na jego bazie zaczął pisać Sierpiński, który łącznie wydał blisko 350 prac. Inny wybitny polski logik T. Kotarbiński w jednym ze swoich opracowań pisał:

*Kto nie rozumie logiki i teorii mnogości, ten zwykle nie rozumie i tego, że jej nie rozumie.*³

Przytoczone powyżej zdanie pozwala na wysnucie wniosku, że teoria mnogości nie jest dyscypliną łatwą, której zrozumienie nie sprawia większych trudności, choć paradoksalnie nazywana jest często wstępem do matematyki wyższej.

Pojęcia i metody teorii mnogości stosowane są we wszystkich działach matematyki i są punktem wyjścia do ścisłego zdefiniowania i wyjaśnienia podstawowych pojęć matematycznych.

³ Skurzyński K., *Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura.*, Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego., Szczecin 1992., s.37.

Więcej...

1. Kofler E., Z dziejów matematyki., Wiedza Powszechna., Warszawa 1962.
2. Wojciechowska A., Alfred Tarski., Czasopismo Matematyka nr 3/2001., s. 132 -135.
3. Wojciechowska A., Szkoła Historii Matematyki., Czasopismo Matematyka nr 4/2004., s. 245-246.
4. Skurzyński K., Matematyka – nasza niedostrzegalna kultura., Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Szczecińskiego., Szczecin 1992.
5. Zakrzewski M., Teoria mnogości., Historia nauki polskiej wiek XX., Wydawnictwo IHN PAN., Warszawa 1994.